巴斯卡三角形的有趣性質與開立根

一個魔術：

請讓我為你變一個魔術。首先，請你在紙上將任意六個阿拉伯數字寫在同一列上（數字可重複），例如：8 3 7 6 4 5在你寫完之後我將很快地在另一張紙上寫下一個數字（不讓你看到是多少），然後我請你將你所寫的六個數字由左而右兩兩相加,將每兩個相鄰的數字的和除以9的餘數寫在兩個數字的下方；以剛才的六個數字為例，你將在第二列寫下2, 1, 4, 1, 0 等五個數字，因為8＋3 除以9 的餘數為2，3＋7 除以9 的餘數為1， 7＋6 除以9 的餘數為4 等，接著我請你依此類推，用相同的方式由第二列產生第三列，由第三列產生第四列，……，直到第六列為止；第六列將只剩一個數字。

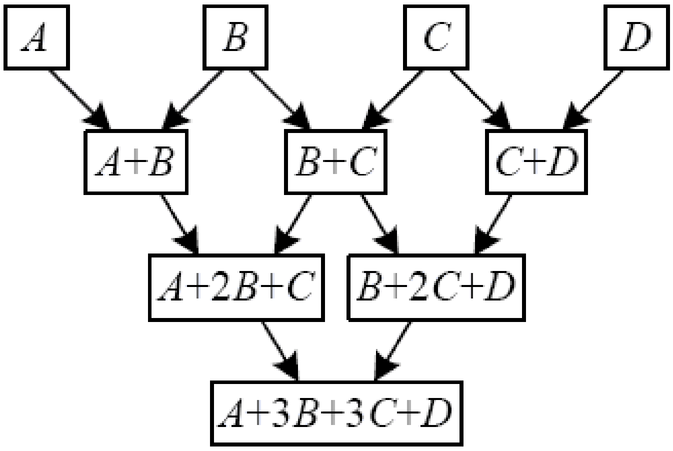
巴斯卡三角形的幾個有趣而又不難理解的性質：

觀察巴斯卡三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

A.同一列中的公因數：

1.第n 列除了頭尾兩端的1 之外的其他$(n-1)$ 個數全部都是n 的倍數；例如當n 為7 時，第七列的7, 21, 35,35, 21, 7 等全都是7 的倍數。
2. 我們還可推知第p 列除了頭尾兩端的1 之外的其他$(p-1)$ 個數的最大公因數一定是p（因為$C(p,1)=p$ ）。
3. 對每一列而言，除了頭尾兩端的1 之外，位於同一列上的任意兩數之間似乎都不會互質。
B.巴斯卡三角形中的奇數：
巴斯卡三角形的第零列有一個奇數，第一列與第二列各有兩個奇數，第三列則有四個奇數；如果我們由三角形的頂端一列一列往下看，各列中的奇數個數分別是1, 2, 2, 4, 2, 4, 4,8, 2, 4, 4, …，它們「似乎」都是2 的整數次方。
C.手算立方根之前當然你要會 "$(a+b)^3$的公式"
由 "$(a+b)^3$" 公式去推出該如何計算立方根，根據此原理也可以算到n次方根我不會講解他的原理，因此直接講實例的算法，懂了怎麼算之後你再看立方根的算法你大概就可以瞭解原理了
1.先判斷此立方根為幾位數。可推理出15625的立方根為兩位數
2.判斷a的值位多少。可推出a的值為2(2的三次方等於8)
3.在判斷b的值為多少。然後套入公式第二個提出b的式子$3a^2+3ab+b^2$ => $1200+60b+b^2$，最後可以推理出b等於54.
若立方根大於三位數，則重複第三步驟。
在本文結束前讓我們回頭看看本文一開始提及的魔術；這個魔術不見得要從六個數開始，以下我們先看由四個數開始的情形。假設最初的四數為A, B, C, D ；如果在各階段先不做除以9 取餘數的動作，整個計算過程將如下：



因此這個魔術最後一列的數一定會等於A, B,C,D 分別乘以(1, 3, 3, 1) 後全部相加再除以9 的餘數，而(1, 3, 3, 1)正是巴斯卡三角形的第三列；這當然並非偶然，讀者不難看出如果此魔術是從n 個數開始，最後一列的數一定會是一開始的n 個數分別乘上巴斯卡三角形的第$(n \updownarrow 1)$列的n 個數後全部相加再除以9 的餘數。以本文一開始的8, 3, 7, 6, 4, 5 六數爲例，最後一列的數將是它們分別乘上1, 5, 10, 10, 5,1 後全部相加再除以9 的餘數；由於我們在意的只是除以9 的餘數，因此計算過程中所有的數都可以用除以9 之後的餘數（或是對模9 而言同餘的數）取代；以本例而言，我們很快就

能算出（甚至用心算）最後的數字爲7

參考:科學月刊(許介彥大葉大學 電信工程學系）