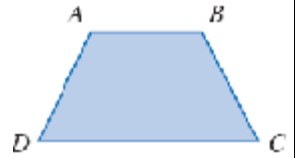


1 梯形的定義

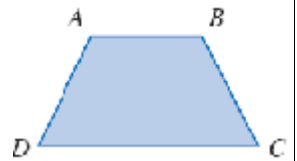
n 梯形：一組對邊平行但另一組對邊不平行的四邊形，稱為梯形。

【說明】如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，四邊形 $ABCD$ 為一個梯形，其不平行的對邊稱為梯形的兩腰。



n 等腰梯形：兩腰等長的梯形，稱為等腰梯形。

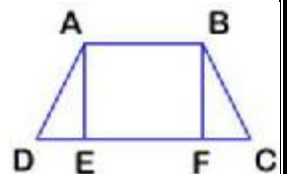
【說明】如圖， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，四邊形 $ABCD$ 為一個等腰梯形。



2 等腰梯形的性質

n 等腰梯形具有下列幾個性質：
1. 等腰梯形的底角相等

【說明】如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。



分別過 A 、 B 兩點作梯形的高 \overline{AE} 、 \overline{BF}

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 中

$\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$ (已知)

$\overline{AE} = \overline{BF}$ (平行線距離相等)

$\angle AED = \angle BFC = 90^\circ$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF$ (RHS)

故 $\angle C = \angle D$ 。(對應角相等)

又因為 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

所以 $\angle DAB = 180^\circ - \angle D$ (同側內角互補)

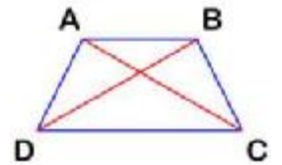
$= 180^\circ - \angle C$ ($\angle C = \angle D$)

$= \angle CBA$ (同側內角互補)

即 $\angle A = \angle B$ 。

2. 等腰梯形的對角線等長

【說明】如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。



\overline{AC} 、 \overline{BD} 分別為腰梯形 $ABCD$ 的對角線

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BCD$ 中

$\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$ (已知)

$\overline{CD} = \overline{CD}$ (公用邊)

$\angle ADC = \angle BCD$ (底角相等)

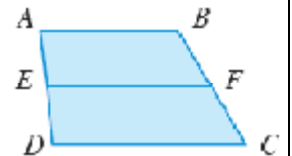
$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BCD$ (SAS)

故 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。(對應邊相等)

3 梯形的中線

n 梯形的中線： 梯形兩腰中點的連接線段稱為梯形的中線。

【說明】 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 E 、 F 分別為 \overline{AD} 與 \overline{BC} 的中點，即 \overline{EF} 為梯形 $ABCD$ 的中線。

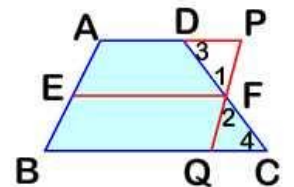


n 梯形的中線性質：

∅ 梯形的中線平行上底和下底。

∅ 梯形的中線長為 $\frac{1}{2}$ (上底+下底)。

【說明】 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{EF} 為中線。



過 F 點作 $\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$ ，分別交直線 \overline{AD} 與直線 \overline{BC} 於 P 、 Q 兩點。

因為 $ABQP$ 為平行四邊形，對邊相等

$\therefore \overline{AB} = \overline{PQ}$

在 $\triangle DFP$ 和 $\triangle CFQ$ 中

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (對頂角)

$\overline{DF} = \overline{CF}$ (F 為中點)

$\angle 3 = \angle 4$ (內錯角)

$\therefore \triangle DFP \cong \triangle CFQ$ (ASA)

故 $\overline{PF} = \overline{FQ}$ 且 $\overline{DP} = \overline{QC}$ (對應邊相等)

又 $\overline{PF} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AE}$

$\therefore AEFP$ 為平行四邊形

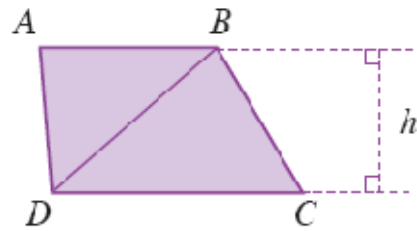
($\because \overline{AE} \parallel \overline{PF}$ 且 $\overline{AE} = \overline{PF}$)

故 $\overline{AP} \parallel \overline{EF}$ 且 $\overline{AP} = \overline{EF}$

同理 $EBQF$ 為平行四邊形
 $\therefore EF \parallel BQ$ 且 $EF = BQ$
 由以上可得 $AD \parallel EF \parallel BC$
 且 $AP + BQ = 2EF$
 $AD + DP + BC - QC = 2EF$
 $AD + BC = 2EF$ ($DP = QC$)

n 梯形的中線與面積
 梯形的面積 = (上底 + 下底) · 高 ÷ 2
 = 梯形中線長 · 高

【說明】如圖，梯形 $ABCD$ 的面積可由三角形面積公式來推得：



梯形 $ABCD$ 的面積

$$\begin{aligned} &= \frac{AB \cdot h}{2} + \frac{CD \cdot h}{2} \\ &= \frac{AB + CD}{2} \cdot h \\ &= \text{中線長} \cdot h \end{aligned}$$

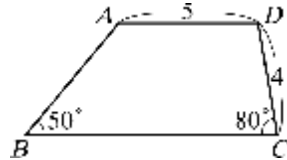
範 例 講 解

Ex1.

(1). 等腰梯形的上底為 5，腰長為 10，底角為 60° ，則面積為多少平方單位？

(2). 若等腰梯形的上底為 6，下底為 12，腰長為 5，則梯形面積為多少平方單位？

(3). 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 50^\circ$ ， $\angle C = 80^\circ$ ，

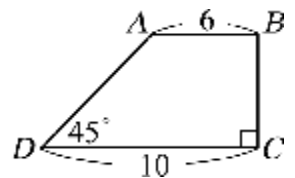


若 $AD = 5$ ， $CD = 4$ ，則 $BC = ?$

Ans: $50\sqrt{3}$; 36 ; 9

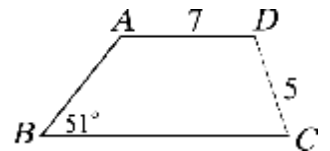
Hw1.

(1). 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle D = 45^\circ$ ， $AB = 6$ ， $CD = 10$ ，則梯形面積為多少平方單位？



(2). 等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB = CD = 4$ ， $AD = 3$ ， $BC = 9$ ，則其面積為多少平方單位？

(3). 如圖， $AD \parallel BC$ ， $AD = 7$ ， $BC = 12$ ， $AB = 6$ ， $CD = 5$ ， $\angle B = 51^\circ$ ，則 $\angle D = ?$



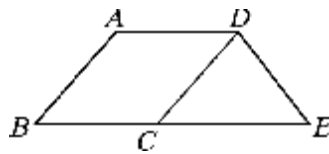
Ans: 32; $6\sqrt{7}$; 102

Ex2.

Hw2.

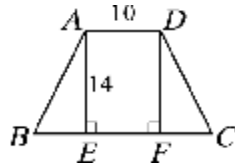
(1).如圖，梯形

$ABED$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ，
已知 $\overline{AD} = 8$ ， $\overline{BE} = 18$ ，且 $\triangle DCE$ 的面積為 30 平方單位，
則四邊形 $ABCD$ 的面積為多少平方單位？

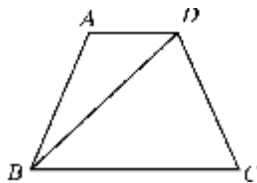


(2).如圖，等腰梯形

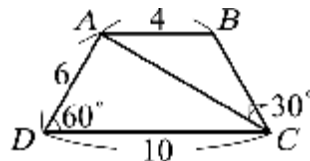
$ABCD$ 的面積為 238，且 $\overline{AD} = 10$ ，
 $\overline{AE} = 14$ ，求 \overline{BE} 與 \overline{AB} 的長。



(3).如圖， $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BC} = 9$ ，若 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
且 $\triangle BCD$ 的面積是 27，試求 $\triangle ABD$ 的面積。



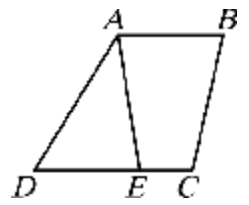
(4).如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為多少平方單位？



Ans: 48; $\overline{BE} = 7$ ， $\overline{AB} = 7\sqrt{5}$; 12; $\frac{48}{5}$

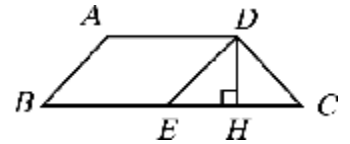
(1).如圖， \overline{AE} 將梯形

$ABCD$ 分割成 $\triangle ADE$ 和梯形 $ABCE$ ，已知 $\overline{AB} = \overline{DE} = 4$ ， $\overline{CE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ ，又 $\triangle ADE$ 的面積為 10 平方單位，
則梯形 $ABCE$ 的面積為多少平方單位？

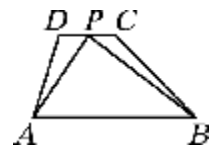


(2).如圖，等腰梯形

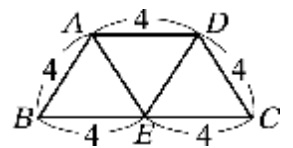
$ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{AD} = 18$ ， $\overline{BC} = 38$ ，且 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{DH} \perp \overline{BC}$ ，求 \overline{CE} 的長=? 求 \overline{DH} 的長=? 求等腰梯形 $ABCD$ 的面積=?



(3).如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， P 為 \overline{CD} 上任一點，且 $\overline{AB} = 3 \overline{CD}$ ，設梯形 $ABCD$ 的面積為 36 平方單位，則 $\triangle PAB$ 的面積為多少平方單位？



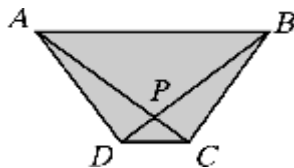
(4).如圖，請問等腰梯形 $ABCD$ 的面積為多少平方單位？



Ans: 15; 20, $5\sqrt{5}$, $140\sqrt{5}$; 27; $12\sqrt{3}$

Ex3.如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle CBA$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 P 點。請在

下面的空格內填入適當的文字或符號，說明 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，且 $\overline{PD} = \overline{PC}$ 。

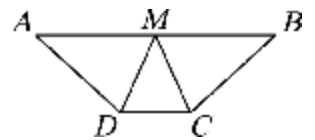


說明：

(1).在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle CBA$ 中，
因為 []，(公用邊)
 $\angle DAB = \angle CBA$ ，(已知)
[]，(已知)
所以 $\triangle DAB \cong \triangle CBA$ ，(根據 [] 全等性質)

Hw3.如圖，等腰梯形

$ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\angle A = \angle B$ ， M 為 \overline{AB} 中點。請在下面的空格內填入適當的文字或符號，說明 $\overline{MD} = \overline{MC}$ 。



說明：

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle BCM$ 中，
因為 []，(M 為 \overline{AB} 中點)
[]，(已知)
[]，(已知) 所以 $\triangle ADM \cong \triangle BCM$ ，
(根據 [] 全等性質)
故 []。(對應邊)

故 $\angle ADB = \angle BCA$ (對應角)

(2). 在 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 中,

因為 $\angle ADB = \angle BCA$,

[], (對頂角)

[], (已知)

所以 $\triangle PAD \cong \triangle PBC$, (根據 [] 全等性質)

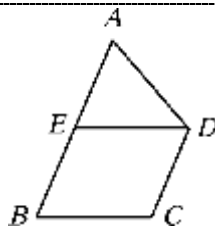
故 $\overline{PA} = \overline{PB}$, $\overline{PD} = \overline{PC}$ (對應邊)

Ans: $\overline{AB} = \overline{AB}$, $\overline{ADB} = \overline{BC}$, SAS; $\angle APD = \angle BPC$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, AAS

Ans: $\overline{AM} = \overline{BM}$; $\angle A = \angle B$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; SAS; $\overline{MD} = \overline{MC}$

Ex4. 如圖, 等腰梯形 ABCD

中, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, E 點在 \overline{AB} 上, 且 $\overline{BE} = \overline{CD}$ 。請在下面的空格內填入適當的文字或符號, 說明 $\overline{AD} = \overline{DE}$ (即 $\triangle ADE$ 為等腰三角形)。



說明:

因為 $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$, ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$)

且 [], (已知)

所以四邊形 BCDE 為平行四邊形, (一組對邊 [])

所以 [] (對邊等長)

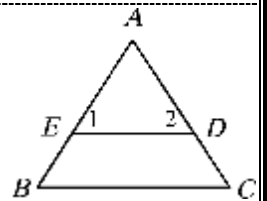
又 $\overline{BC} = \overline{AD}$, (已知等腰)

故 $\overline{AD} = \overline{DE}$

Ans: $\overline{BE} = \overline{CD}$, 平行且相等, $\overline{BC} = \overline{DE}$

Hw4. 如圖, 等腰三角形 ABC

中, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{CD}$ 。請在下面的空格內填入適當的文字或符號, 說明 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。



說明:

因為 $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}$

$= \overline{AC} - \overline{CD}$ (已知 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{CD}$)

$=$ []

所以 $\triangle ADE$ 為等腰三角形,

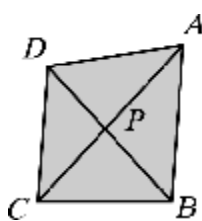
得 $\angle 1 = (180^\circ - []) \div 2$ ($\angle 1 = \angle 2$)

$= \angle B$ ($\triangle ABC$ 為等腰三角形)

故 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ([] 角相等)

Ans: \overline{AD} , $\angle A$, 同位

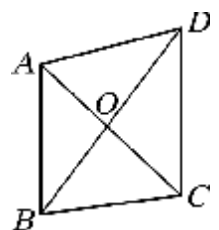
Ex5. 如圖, 梯形 ABCD 中, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 P 點, $\triangle ADC$ 與 $\triangle PBC$ 的面積分別為 19 與 10, 求 $\triangle PDC$ 的面積。



Ans: 9

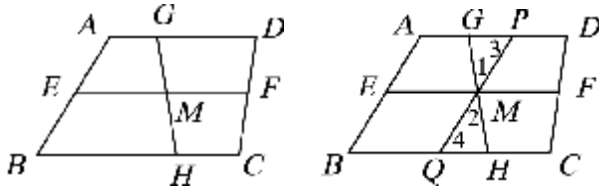
Hw5. 如圖, 在梯形 ABCD

中, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, 且 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點, 已知 $\triangle ABD$ 的面積為 20 平方單位, $\triangle BOC$ 的面積為 11 平方單位, 則 $\triangle ABO$ 的面積為多少平方單位?



Ans: 9

Ex6. 如圖梯形 $ABCD$ 中，中線 \overline{EF} 與 \overline{GH} 相交於 M 。請在下面的空格內填入適當的文字或符號，說明 $\overline{MG} = \overline{MH}$ (M 為 \overline{GH} 中點)。



說明：

(1) 過 M 點作 $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ，分別交直線 AD 與直線 BC 於 P 、 Q 兩點。

因為 \overline{EF} 為 []，所以 $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ (或 \overline{BC})，

故四邊形 $AEMP$ 與 $EBQM$ 均為 [] 形。

(2) 在 $\triangle GMP$ 和 $\triangle HMQ$ 中，因為 []，(對頂角) []，(內錯角)

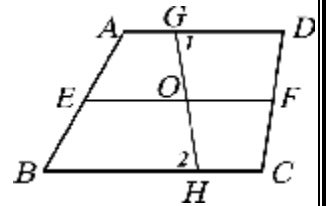
$\overline{PM} = \overline{AE}$ (對邊相等) = \overline{EB} (E 為 \overline{AB} 中點) = [] (對邊相等)

所以 $\triangle GMP \cong \triangle HMQ$ ，(根據 [] 全等性質)

故 $\overline{MG} = \overline{MH}$ 。(對應邊)

Ans: 中線，平行四邊； $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， \overline{MQ} ，ASA

Hw6. 如圖， \overline{EF} 為梯形 $ABCD$ 的中線， \overline{GH} 與 \overline{EF} 相交於 O ，則下列何者錯誤？



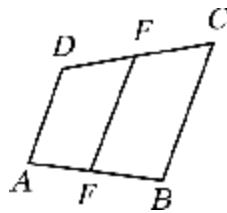
(A) $\overline{EF} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

(B) $\angle 1 = \angle 2$ (C) 梯形 $ABHG$ 面積 = 梯形 $GHCD$ 面積 (D) $\overline{GO} = \overline{OH}$ 。

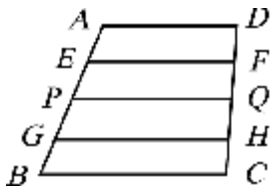
Ans: C

Ex7.

(1). 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{BC} = 12$ ，且中線 $\overline{EF} = 10$ ，求 \overline{AD} 的長。



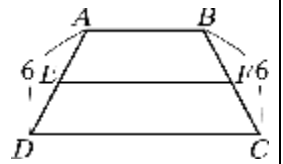
(2). 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AE} = \overline{EP} = \overline{PG} = \overline{GB}$ ， $\overline{DF} = \overline{FQ} = \overline{QH} = \overline{HC}$ ， $\overline{AD} = 20$ ， $\overline{BC} = 28$ ，求 \overline{PQ} 的長 = ? $\overline{EF} + \overline{GH} = ?$



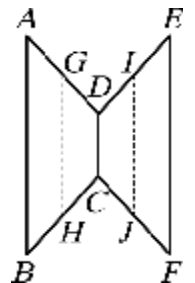
(3). 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，中線 $\overline{EF} = 5$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ 於 H ， $\overline{AH} = 2$ ，求 \overline{CD} 的長。

Hw7.

(1). 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 的兩腰長為 6 ，周長為 30 ，則中線 $\overline{EF} = ?$

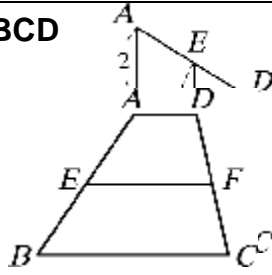


(2). 如圖是由梯形 $ABCD$ 和 $EFCD$ 組成的， \overline{GH} 和 \overline{IJ} 分別為其中線，已知 $\overline{GH} + \overline{IJ} = 20$ ， $\overline{AB} + \overline{EF} = 30$ ，則兩梯形的共同邊 $\overline{CD} = ?$



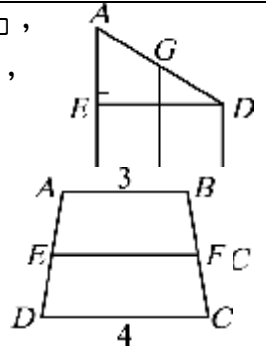
(3). 如圖， \overline{GF} 為梯形 $ABCD$ 的中線，已知 $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ，且 $\overline{GF} = 15$ ，若 $\overline{AE} = 6$ ，則 $\overline{CD} = ?$

- (4).如圖， \overline{EF} 為梯形 $ABCD$ 的中線，已知 $\overline{AD} = \sqrt{5}$ ，且梯形 $EBCF$ 的周長比梯形 $AEFD$ 的周長多 $\sqrt{20}$ ，則 $\overline{BC} = ?$



Ans: 8;48;4.3√5

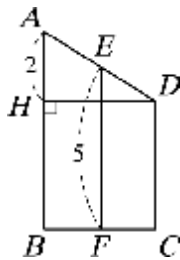
- (4).如圖，梯形 $ABCD$ 中， \overline{EF} 為中線， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$ ，且四邊形 $ABFE$ 的周長為 11，則四邊形 $EFCD$ 的周長為何？



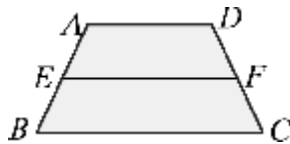
Ans: 9;5;12;12

Ex8.

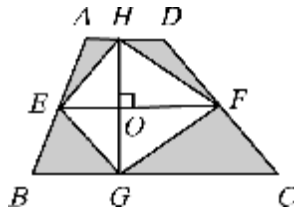
- (1).梯形 $ABCD$ 中，中線長 6，高為 8，則面積為多少平方單位？
 (2).如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，中線 $\overline{EF} = 5$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ 於 H ， $\overline{AH} = 2$ ，若已知梯形 $ABCD$ 的面積為 15，求其周長。



- (3).如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AB} = 4$ ，中線 $\overline{EF} = 6$ ，求等腰梯形 $ABCD$ 的面積。



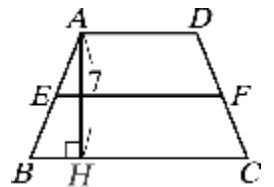
- (4).如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，中線 $\overline{EF} = 16$ ， $\overline{GH} \perp \overline{EF}$ ，且 $\overline{GH} = 12$ ，求灰色部分的面積。



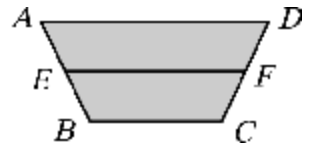
Ans: 48;13 + √13 ;12√3 ;96

Hw8.

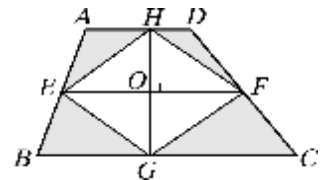
- (1).一等腰梯形的中線長為 10，下底比上底多 6，且知其面積為 40 平方單位，則周長為何？
 (2).如圖，梯形 $ABCD$ 的面積為 56 平方單位， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AH} = 7$ ，則 $\overline{AD} + \overline{EF} + \overline{BC} = ?$



- (3).如圖，等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，中線 \overline{EF} 比 \overline{AB} 多 2，且知梯形周長為 16，求中線 \overline{EF} 的長。



- (4).如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，中線 \overline{EF} 長為 15，其中 $\overline{HG} \perp \overline{EF}$ ，且已知 $\overline{HG} = 10$ ，則灰色部分的面積為多少平方單位？



Ans: 30;24;5;75

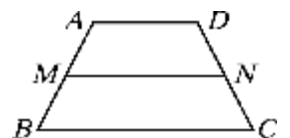
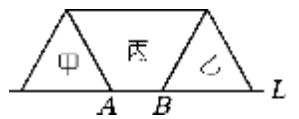
Ex9.

- (1).梯形 $ABCD$ 中，中線長為上底的 2 倍，則下底為上底的幾倍？
 (2).如圖，梯形 $ABCD$ 中， \overline{EF} 為其中線，則梯形 $AEFD$ 和梯形 $ABCD$ 的面積比為何？



Hw9.

- (1).如圖，甲、乙均是邊長為 2 的正三角形，丙為梯形，且同在直線 L 上，若甲、乙的面積和等於丙的面積，則 $\overline{AB} = ?$
 (2).如圖，在梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel$

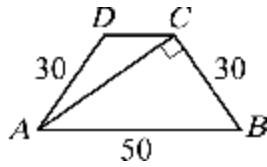


Ans: 3; 5 : 12

\overline{BC} ， M 、 N 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的中點，已知 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BC} = 8$ ，則 $\frac{\text{梯形 } AMND \text{ 面積}}{\text{梯形 } MBCN \text{ 面積}} = ?$

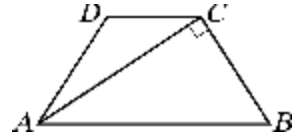
Ans: $1; \frac{5}{7}$

Ex10. 如圖， $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ， $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = 50$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = 30$ ，則此梯形的中線長是多少？



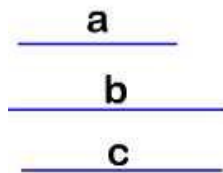
Ans: 32

Hw10. 如圖， $ABCD$ 為等腰梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{AB} = 25$ ， $\overline{AD} = 15$ ，則梯形 $ABCD$ 的面積為多少平方單位？



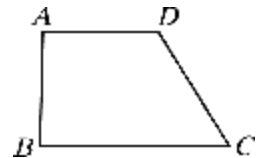
Ans: 192

Ex11. 如圖，請用尺規作圖畫出上底為 a ，下底為 b ，兩腰長為 c 的等腰梯形。



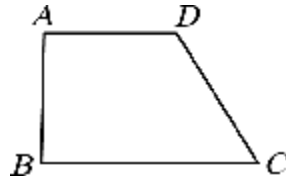
Ans: 略

Hw11. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，請用尺規作圖畫出其中線。



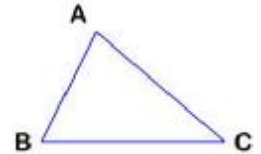
Ans: 略

Ex12. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，請用尺規作圖過 A 作一直線，將梯形 $ABCD$ 面積兩等分。



Ans: 略

Hw12. 如圖，求作一點使 $ABCD$ 成為梯形，且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。



Ans: 略