根 式 的 四 則 運 算

翰林版(一)2-2

單	元	內	容

1 最簡根式

- **最簡根式**：含有根號的式子稱為根式，如果根式中的每一個根號內的數字都是整數(不含分數中的分母)，而且質因數分解後，每一個質數的次方皆小於開根號的次數，這樣的根式稱為**最簡根式**。

【說明】

(1). $\sqrt{7}$、$\frac{\sqrt{5}}{2}$、$\sqrt{5\times3}$、$2\sqrt{3}$都是最簡根式。

(2). $\sqrt{7^3}$、$\sqrt{\frac{5}{2}}$、$\sqrt{5^2\times3}$ 都不是最簡根式。

2 根式的乘法

- **指數律**：

1. $a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=(a\times b)^{\frac{1}{2}}$

即 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

2. $x^m\div x^n=x^{m-n}$

3. $(x^m)^n=x^{m\times n}$

【說明】

(1). $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

(2). $x^5\div x^2=x^3$

(3). $(x^3)^2=x^6$

- **根式的乘法**：

如果 a、b 是大於或等於 0 則：

Ø 交換律:

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{b}\times\sqrt{a}=\sqrt{ab}$

Ø 結合律:

$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times\sqrt{c}$

$=\sqrt{a}\times(\sqrt{b}\times\sqrt{c})=\sqrt{abc}$

【說明】

(1). $2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(2). $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$

(3). $(\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$

$=\sqrt{30}$

3 根式的化簡

- **根式的化簡**：根式在的使用上通常都以最簡根式來表示，以期達到簡化和一致性的目的。

【說明】

$\sqrt{7^3}=\sqrt{7^2\times7}=\sqrt{7^2\times7}\ \sqrt{7^2\times7}$

$\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}=5\times\sqrt{3}$

4 根式的除法

n 根式的除法：

如果 a 大於或等於 0，而且 b 大於 0

則：

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a} \div \frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

【說明】

(1). $\sqrt{2} \div 3$

(2). $2 \div \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{3}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3). $\sqrt{2} \div \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{3}}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}$

範 例 講 解

Ex1.將下列各式化為最簡根式：

(1). $\sqrt{45}$　(2). $\sqrt{2^5 \cdot 3^3}$

(5). $3\sqrt{72}$

Hw1.將下列各式化為最簡根式：

(1). $\sqrt{512}$　(2). $\sqrt{3^5 \cdot 5^3}$

(3). $5\sqrt{24}$

Ex2.請將下列各式化為最簡根式：

(1). $\sqrt{\frac{3}{2}}$　(2). $\sqrt{\frac{5}{24}}$

(3). $\frac{3}{2\sqrt{5}}$

Hw2.請將下列各式化為最簡根式：

(1). $\sqrt{\frac{2}{5}}$　(2). $\sqrt{\frac{7}{18}}$

(3). $\frac{2}{\sqrt{98}}$

Ex3.計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1). $\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}$　(2). $\sqrt{36} \cdot \sqrt{98}$

(3). $\sqrt{(-3)^2} \cdot \sqrt{4}$　(4). $\sqrt{\frac{125}{4}} \cdot \sqrt{\frac{32}{5}}$

(5). $\sqrt{80} \div \sqrt{2}$　(6). $\sqrt{\frac{4}{9}} \div \sqrt{\frac{4}{3}}$

(7). $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Hw3.計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1). $\sqrt{90} \cdot \sqrt{2}$　(2). $\sqrt{216} \cdot \sqrt{\frac{7}{36}}$

(3). $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}})^2$　(4). $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

(5). $\sqrt{162} \div \sqrt{\frac{3}{2}}$　(6). $\sqrt{\frac{5}{2}} \div \sqrt{\frac{8}{125}}$

(7). $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

Ex4.計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1). $\sqrt{2\frac{1}{4}} \times (-\sqrt{\frac{4}{5}}) \div \sqrt{\frac{3}{20}} = ?$

Hw4.計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1). $\sqrt{1\frac{1}{4}} \div \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt{\frac{16}{21}} = ?$

(2). $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} \div \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ =?

(3). $(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}) \div \sqrt{\dfrac{8}{45}} \times (-\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}) =$?

(2). $(-\sqrt{\dfrac{5}{18}}) \div (\dfrac{\sqrt{45}}{-\sqrt{2}}) \times (\dfrac{-\sqrt{5}}{8})$ =?

(3). $(-\sqrt{\dfrac{5}{7}}) \div \sqrt{\dfrac{28}{25}} \div (-\sqrt{\dfrac{3}{5}})$

Ex5.

(1).若 $3\sqrt{2} \cdot x = 2\sqrt{5}$，求 x。

(2).若一長方體的體積為 $\sqrt{21}$ 立方公分，其長為 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ 公分，寬為 $\sqrt{\dfrac{14}{25}}$ 公分，求此長方體的高。

Hw5.

(1).若 $3\sqrt{2} \div x = 2\sqrt{5}$，求 x。

(2).如圖，正方形面積與長方形面積相等，正方形邊長為 $\sqrt{6}$，長方形的長為 $\sqrt{12}$，求長方形的寬。

Ex6.

(1).由查表知 $\sqrt{21}$=4.5826，$\sqrt{2.1}$=1.4491, 分別求下列各方根的值：

$\sqrt{210}$　$\sqrt{2100}$　$\sqrt{21000}$　$\sqrt{0.21}$

(2).設 $\sqrt{1.5}$ =1.225，$\sqrt{15}$ =3.873，求 $\sqrt{\dfrac{50}{3}}$ 的值。(以四捨五入法,取至小數第二位)

(3).由查表知 $\sqrt{59}$ =7.681146，求 $\sqrt{2124}$ 的整數部分。

Hw6.

(1).若 $\sqrt{31}$=5.567764，$\sqrt{310}$ =17.60682, 分別求下列各數的近似值：

$\sqrt{3.1}$　$\sqrt{3100}$　$\sqrt{31000}$　$\sqrt{0.31}$

(2).若 $\sqrt{5}$ =2.236，$\sqrt{50}$ =7.071,求 $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 的值。

(3).已知 $\sqrt{31}$=5.567764 ,求 $\sqrt{4464}$ 的整數部分為多少?

5 根式的加減

- **同類方根**：當根式化簡後根號內所含的數相同時，這些含有相同根號數的數都稱為**同類方根**。

※**同類方根和同類量、同類項具有相同的意義，可以將之視為具有相同的單位。**

【說明】

(1). $\sqrt{a}$、$2\sqrt{a}$、$-\sqrt{a}$、$\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ 都是同類方根。

(2). $\sqrt{3}$、$\sqrt{2}$ 不是同類方根。

(3). $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$、$\sqrt{3}$ 是同類方根。

(4). $\sqrt{2}$、$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 不是同類方根。

n 根式的加減法：
同類方根可將之視為同類量，可以進行加減的合併。

Ø 交換律:
$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$

Ø 結合律:
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$
$=\sqrt{a}+(\sqrt{b}+\sqrt{c})$

Ø 分配律：
$\sqrt{a}\times(\sqrt{b}+\sqrt{c})$
$=\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\sqrt{a}\times\sqrt{c}$

$\sqrt{a}\times(\sqrt{b}-\sqrt{c})$
$=\sqrt{a}\times\sqrt{b}-\sqrt{a}\times\sqrt{c}$

【說明】
(1). $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
(2). $(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$
$=\sqrt{2}+(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
(3). $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{5}$
(4). $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$
(5). $-\sqrt{3}+5\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
(6). $3\sqrt{5}-5\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$
(7). $-2\sqrt{5}-3\sqrt{3}=-2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

6 根式的四則運算

n **根式的四則運算**：與一般數的運算相同，依照先乘除後加減的原則，最後**同類方根**必須合併，結果必須化為**最簡根式**。

【說明】化簡 $2(\sqrt{12}-\sqrt{3})-(\sqrt{25}+\sqrt{50})$
$2(\sqrt{12}-\sqrt{3})-(\sqrt{25}+\sqrt{50})$
$=2(\sqrt{2^2\times3}-\sqrt{3})-(\sqrt{5^2}+\sqrt{2\times5^2})$
$=2(2\sqrt{3}-\sqrt{3})-(5+5\sqrt{2})$
$=2(\sqrt{3})-5-5\sqrt{2}$
$=2\sqrt{3}-5-5\sqrt{2}$
$=-5-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

範 例 講 解

Ex8.化簡下列各式：
(1).$3\sqrt{6}-8\sqrt{6}$　(2).$\sqrt{72}-\sqrt{32}$
(3).$\sqrt{75}-2\sqrt{48}$　(4).$\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\sqrt{27}$
(5).$\sqrt{5}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$
(6).$3\sqrt{24}+\sqrt{96}+\sqrt{45}-\sqrt{125}$
(7).$5(\sqrt{3}-2\sqrt{6})-(2-9\sqrt{6})$

Hw8.化簡下列各式：
(1) .$2\sqrt{6}+4\sqrt{6}-7\sqrt{6}$　(2) .$5\sqrt{8}-3\sqrt{18}$
(3) .$3\sqrt{2}-5\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
(4) .$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(5).$\sqrt{2}(\sqrt{10}-\sqrt{3})$
(6). $7\sqrt{8}-2\sqrt{45}+4\sqrt{20}-5\sqrt{18}$
(7). $5(\sqrt{98}-\sqrt{75})-2(3\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

7 乘法公式與根式的有理化

- **根式的乘法公式：**

1. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$
$=a+2\sqrt{ab}+b$

2. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$
$=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$
$=a-2\sqrt{ab}+b$

3. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$
$=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$
$=a-b$

【說明】

(1). $(2+\sqrt{3})^2$
$=2^2+2\times 2\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$
$=4+4\sqrt{3}+3$
$=7+4\sqrt{3}$

(2). $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$
$=(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$
$=2-2\sqrt{6}+3$
$=5-2\sqrt{6}$

(3). $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$
$=3-5=-2$

- **根式的有理化**: 當分數的分母部分含有根式時，利用分子分母同乘另一個根式使分母去根號成為有理數，這樣的過程稱為**有理化**，所乘的根式稱為**有理化因子**。

※**有理化根式時通常會利用平方差的乘法公式**。

【說明】

(1). $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})=-2$
所以 $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 互為**有理化因子**。

(2). $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=2-1=1$
所以 $\sqrt{2}-1$ 和 $\sqrt{2}+1$ 互為**有理化因子**。

範　　例　　講　　解

Ex9.請展開下列各式並化為最簡根式：

(1). $(7-\sqrt{3})^2$　　**(2).** $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$

(3). $(3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

(4). $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$

Hw9.請展開下列各式並化為最簡根式：

(1). $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

(2). $(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

(3). $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$

(4). $(\sqrt{24}-\sqrt{28})^2(\sqrt{24}+\sqrt{28})^2$

Ex10.請將下列各式化為最簡根式：

(1). $\dfrac{\sqrt{27}-\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ (2). $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3). $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-1}$

Hw10.請將下列各式化為最簡根式：

(1). $\dfrac{1}{\sqrt{28}+\sqrt{7}}$ (2). $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

(3). $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

綜 合 應 用

Ex11.請將下列各式化為最簡根式：

(1). $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(2). $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

Hw11.請將下列各式化為最簡根式：

(1). $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(2). $\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Ex12.

(1).比較 $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$ 、 $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ 、 $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ 、 $\dfrac{3}{7}$ 四數值的大小。

(2).$a=\sqrt{1}+\sqrt{6}$ ，$b=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ，$c=\sqrt{3}+\sqrt{4}$ ，則 a、b、c 之大小關係為何？

Hw12.

(1).比較 $\dfrac{5}{2}$ 、 $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ 、 $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ 、 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 四數的值，何者最大？

(2).若 $a=\sqrt{12}-\sqrt{5}$ ，$b=\sqrt{14}-\sqrt{3}$ ，則 a 與 b 的大小關係為何？

Ex13.請試著利用乘法公式來解：

(1). $\sqrt{146\dfrac{1}{144}}$ (2). $\sqrt{142\dfrac{1}{144}}$

Hw13.請試著用乘法公式解 $258\dfrac{1}{256}$ 的正平方根。

Ex14.若一長方形的長為$(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$公分，寬為$(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$公分，則此長方形面積為多少平方公分？	**Hw14.**化簡$(1+\sqrt{3}-\sqrt{5})(1-\sqrt{3}+\sqrt{5})$＝？