▼ B1-3-1 多項式的四則運算 班號： 姓名：

▼ 本節提要

本節介紹n次多項式的定義與相關名詞及多項式的四則運算。

多項式的定義及其性質

若$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

- $f(0)=a_0$ (常數項)
- $f(1)=a_n+a_{n-1}+\dots+a_3+a_2+a_1+a_0$ (各項係數總和)
- $f(-1)=a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}+\dots-a_3+a_2-a_1+a_0$ (偶奇次項係數差)
- $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dots+a_4+a_2+a_0$ (偶次項係數和)
- $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dots+a_5+a_3+a_1$ (奇次項係數和)

多項式的四則運算

- 設$f(x),g(x)$為二多項式,已知 $\deg f(x)>\deg g(x)$且$g(x)\neq\underset{\text{零多項式}}{0}$
  則 $\underset{\text{被除式}}{f(x)}=\underset{\text{除式}}{g(x)}\times\underset{\text{商式}}{q(x)}+\underset{\text{餘式}}{r(x)}$ 且 $r(x)=0$或
  $\deg r(x)<\deg g(x)$

1 多項式的定義及其性質

重點

多項式的定義

• 每一個x的一元多項式(*Polynominal*)都可以寫成

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$,其中

其中n為正整數或零, 且$a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0\in R$

(1)$a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1},\ldots, a_2x^2, a_1x, a_0$分別為此多項式的$n$次項,$n-1$次項,...,,2次項,1次項及零次項(常數項)。

(2)$a_n, a_{n-1},\ldots, a_2, a_1, a_0$分別叫做$x^n, x^{n-1},\ldots, x^2, x^1, x^0$的「係數」, 其中$a_n$稱為「首項係數」。

(3)$a_n\neq 0$時,n叫做多項式$f(x)$的「次數」,以符號$degf(x)=n$表示, 稱$f(x)$為n次多項式,

[例如]: $2x^3+5x-4$是x的3次多項式,其3次項係數為2, 2次項係數為0(缺項), 1次項係數為5, 常數項為-4

多項式的種類

• 只含一個未知數的多項式叫「一元多項式」。
• 含有多個(一個以上)未知數的多項式叫「多元多項式」。
• 僅含常數項的多項式叫「常數多項式」。其中,常數項不為零的常數多項式又稱「零次多項式」。反之,常數項為零的常數多項式則稱「零多項式」。

[例如]: $3=3\times 1=3\times x^0$為零次多項式

$0=0\times 1=0\times x^0=0\times x^1=0\times x^2=\ldots$為零多項式

多項式的排序

• 多項式的排序分為兩種:

(1)將多項式的每一項, 按照x的次方, 由高而低排序,稱為「降次排序」。

[例如]：$4x^5-5x^4+x^3-2x^2-3x+3$

(2)將多項式的每一項, 按照x的次方, 由低而高排序,稱為「升次排序」。

[例如]：$3-3x-2x^2+x^3-5x^4+4x^5$

多項式相等

• 若兩多項式$f(x)$與$g(x)$的次數相同且同次項的係數都相等, 則稱「$f(x)$與$g(x)$相等」, 以$f(x)=g(x)$表示

多項式係數與函數值的關係

若$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

• $f(0)=a_0$ (常數項)

• $f(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_3+a_2+a_1+a_0$ (各項係數總和)

$=(\ldots+a_4+a_2+a_0)+(\ldots+a_5+a_3+a_1)$ (偶奇項係數和)

• $f(-1)=a_n\cdot(-1)^n+a_{n-1}\cdot(-1)^{n-1}+\ldots-a_3+a_2-a_1+a_0$

$=(\ldots+a_4+a_2+a_0)-(\ldots+a_5+a_3+a_1)$ (偶奇項係數差)

• $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\ldots+a_4+a_2+a_0$ (偶次項係數和)

• $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\ldots+a_5+a_3+a_1$ (奇次項係數和)

例題

例題1　多項式的係數

老師講解　　學生練習

已知
$(ax^5-x^4+x^2-x+2)+(bx^4-2x+1)$是$x$的二次多項式，求$a, b$之值．

例題2　多項式的排序

老師講解　　學生練習

將$P(x)=3-2x^2+4x^5-3x+x^3-5x^4$
(1)依降次重新排序
(2)依升次重新排序

將$P(x)=3x^7-4x^2+x^5-6x+9-x^3$
(1)依降次重新排序
(2)依升次重新排序
[簡答]: $(1)3x^7+x^5-x^3-4x^2-6x+9$
$(2)9-6x-4x^2-x^3+x^5+3x^7$

詳解

(1)降次排列

$P(x)=4x^5-5x^4+x^3-2x^2-3x+3$

(2)升次排列

$P(x)=3-3x-2x^2+x^3-5x^4+4x^5$

例題3　多項式相等

老師講解　　學生練習

設a, b, c, d為實數，且$f(x)=3x^2+ax+5$, $g(x)=bx^3+cx^2-2x+d$.
若$f(x)$與$g(x)$是相等的多項式，則數對(a, b, c, d)=?

設a, b, c, d為實數，且
$f(x)=-2x^2-ax+(b+4)$, $g(x)=(c+3)x^3+dx^2+5x-3$.若$f(x)$與$g(x)$是相等的多項式，則數對(a, b, c, d)=?
[簡答]: $(a, b, c, d)=(-5,-7,-3,-2)$

例題4A 多項式的係數

老師講解 | 學生練習

求
$(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$
中x^4項的係數

求
$(x^4+2x^3+3x^2+4x+5)(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$
中x^7項的係數

[簡答]： 14

試一下

歷屆考題1

已知二多項式$P(x)=1+2x+3x^2+\ldots+10x^9+11x^{10}=\sum_{i=0}^{10}(i+1)x^i$**與**
$Q(x)=1+3x^2+5x^4+\ldots+9x^8+11x^{10}=\sum_{i=0}^{5}(2i+1)x^{2i}$**.則**$P(x)$**和**$Q(x)$**的乘積中,**$x^9$**的係數為______ [84學測]**

[簡答]： 110

例題4B 多項式的係數

老師講解 | 學生練習

若$(x^3+ax+2)(2x+a)$的展開式中,x^3項的係數為9,求a之值

例題5　多項式係數與函數值的關係

老師講解　　　　學生練習

設多項式
$f(x)=(x+2)(x^3+x^2-2x+1)^3$, 求
(1)各項係數總和
(2)偶次項係數總和
(3)奇次項係數總和

設多項式$f(x)=(x^2-x+1)^4$, 求
(1)各項係數總和
(2)偶次項係數總和
(3)奇次項係數總和

[簡答]：(1)1　(2)41　(3)－40

例題6　多項式係數與函數值的關係

老師講解　　　　學生練習

設多項式
$f(x)=(x^2+kx+1)(x^3-2x^2+x+1)$,
且$f(x)$的偶次項係數和為4, 求實數k之值

2 多項式的四則運算

2-1 多項式的加法

重點

多項式的加法	• 求兩多項式之和,就是將"同次項係數相加" • 兩多項式相加,其次數為原兩多項式中次數較高者,但當兩多項式次數相同時,卻有可能因為最高次項相互抵消,而使得次數低於原次數. $deg\,(f(x)+g(x)) \leq max\{deg(f(x)), deg(g(x))\}$

例題

例題7 多項式的加法

老師講解	學生練習
設$f(x)=3x^4-2x^2+4x-5$, $g(x)=-x^3-7x+9$, 試求$f(x)+g(x)$	設$f(x)=x^3-x^2-2$, $g(x)=2x^2-3x+1$, 試求$f(x)+g(x)$ [簡答]: x^3+x^2-3x-1

詳解

(一)橫式算法

$$
\begin{aligned}
& f(x)+g(x) \\
&=(3x^4-2x^2+4x-5)+(-x^3-7x+9) \\
&=3x^4-x^3-2x^2+(4-7)x+(-5+9) \\
&=3x^4-x^3-2x^2-3x+4
\end{aligned}
$$

(二)直式算法...

將同次項的位置上下對齊, 然後作運算(缺項補0)

$$
\begin{array}{lrrrrrll}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +4x & -5 & \leftarrow & f(x) \\
+) & & -x^3 & +0x^2 & -7x & +9 & \leftarrow & g(x) \\
\hline
 & 3x^4 & -x^3 & -2x^2 & -3x & +4 & \leftarrow & f(x)+g(x)
\end{array}
$$

(三)分離係數法(略去文字符號x)

$$
\begin{array}{lrrrrrll}
 & 3 & +0 & -2 & +4 & -5 & \leftarrow & f(x) \\
+) & & -1 & +0 & -7 & +9 & \leftarrow & g(x) \\
\hline
 & 3 & -1 & -2 & -3 & +4 & \leftarrow & f(x)+g(x)
\end{array}
$$

2-2 多項式的減法

重點

多項式的加法	• 求兩多項式之差, 就是將"同次項係數相減" • 兩多項式相減,其次數為原兩多項式中次數較高者,但當兩多項式次數相同時,卻有可能因為最高次項相互抵消,而使得次數低於原次數. $deg\,(f(x)-g(x)) \leq max\{deg(f(x)), deg(g(x))\}$

▼ 例題

▼ **例題8** 多項式的減法

老師講解	學生練習
設 $f(x)=3x^4-2x^2+4x-5$，$g(x)=-x^3-7x+9$，試求 $f(x)-g(x)$	設 $f(x)=x^3-x^2-2$，$g(x)=2x^2-3x+1$，試求 $f(x)-g(x)$ **[簡答]**：x^3-3x^2+3x-3

▼ 詳解

▼ **(一)橫式算法**

$$
\begin{aligned}
&f(x)-g(x)\\
&=(3x^4-2x^2+4x-5)-(-x^3-7x+9)\\
&=3x^4+x^3-2x^2+(4+7)x+(-5-9)\\
&=3x^4+x^3-2x^2+11x-14
\end{aligned}
$$

▼ **(二)直式算法...**

將同次項的位置上下對齊，然後作運算(缺項補0)．

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
 & 3x^4 & +0x^3 & -2x^2 & +4x & -5 & \leftarrow & f(x)\\
-) & & -x^3 & +0x^2 & -7x & +9 & \leftarrow & g(x)\\
\hline
 & 3x^4 & +x^3 & -2x^2 & +11x & -14 & \leftarrow & f(x)-g(x)
\end{array}
$$

▼ **(三)分離係數法(略去文字符號x)...**

$$
\begin{array}{rrrrrrcl}
 & 3 & +0 & -2 & +4 & -5 & \leftarrow & f(x)\\
-) & & -1 & +0 & -7 & +9 & \leftarrow & g(x)\\
\hline
 & 3 & +1 & -2 & +11 & -14 & \leftarrow & f(x)-g(x)
\end{array}
$$

2-3 多項式的乘法

重點

多項式的乘法	• **求兩多項式之**積, 就是將"同次項係數相減" • 兩多項式相乘, 其次數為其**最高次項的次數**,亦等於原來兩多項式的次數之總和$(m+n)$ $\left(ax^{m}+\ldots\right)\left(bx^{n}+\ldots\right)=(ab)x^{m+n}+\ldots$

例題

例題9　多項式的乘法

老師講解

設$f(x)=4x^2+5x-1$,
$g(x)=2x^3+x+1$,試求$f(x)\times g(x)$

學生練習

設$f(x)=x^3-x^2-2$,$g(x)=2x^2-3x+1$,試求$f(x)\times g(x)$

[簡答]: $2x^5-5x^4+4x^3-5x^2+6x-2$

詳解

(一)橫式算法

$$
\begin{aligned}
&f(x)\times g(x)\\
&=(4x^2+5x-1)(2x^3+x+1)\\
&=4x^2(2x^3+x+1)+5x(2x^3+x+1)-(2x^3+x+1)\\
&=(8x^5+4x^3+4x^2)+(10x^4+5x^2+5x)+(-2x^3-x-1)\\
&=8x^5+10x^4+[4+(-2)]x^3+(4+5)x^2+(5-1)x-1\\
&=8x^5+10x^4+2x^3+9x^2+4x-1
\end{aligned}
$$

(二)直式算法

$$
\begin{array}{r}
2x^3+0x^2+x+1\\
\times\qquad 4x^2+5x-1\\
\hline
-2x^3-0x^2-x-1\\
10x^4+0x^3+5x^2+5x\qquad\\
8x^5+0x^4+4x^3+4x^2\qquad\qquad\\
\hline
\boxed{8x^5+10x^4+2x^3+9x^2+4x-1}
\end{array}
$$

(三)分離係數法

2-4 多項式的除法

2-4-1 多項式的除法

重點

多項式的除法	• **多項式相除, 其次數為其商的最高次項的次數**,亦等於**原來兩多項式的次數之差** • $deg\ (f(x) \div g(x)) = deg(f(x)) - deg(g(x))$
綜合除法	綜合除法的步驟如下： • 係數分離 • 缺項補零 • 除式變號: (1)除式為$(x+b)$時, 用去$-b$除 (2)除式為$(ax+b)$時, 用$\frac{-b}{a}$去除

例題

例題10　多項式的除法(長除法與分離係數法)

老師講解	學生練習
試求 $(x^4-7x^2+5x-6)\div(x^2+2x-2)$之商式與餘式	試求$(x^3-2x^2-2x+3)\div(x-3)$之商式及餘式 **[簡答]**：商式x^2+x+1, 餘式6

詳解

長除法

被除式$A(x)=x^4-7x^2+5x-6$

除　式$B(x)=x^2+2x-2$

$$
\begin{array}{r|rrrrrl}
 & x^2 & -2x & -1 & & & \\
\hline
x^2+2x-2 & x^4 & +0x^3 & -7x^2 & +5x & -6 & \\
 & x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & \leftarrow x^2\cdot(x^2+2x-2) \\
\hline
 & & -2x^3 & -5x^2 & +5x & & \\
 & & -2x^3 & -4x^2 & +4x & & \leftarrow -2x\cdot(x^2+2x-2) \\
\hline
 & & & -x^2 & +x & -6 & \\
 & & & -x^2 & -2x & +2 & \leftarrow -1\cdot(x^2+2x-2) \\
\hline
 & & & & 3x & -8 &
\end{array}
$$

$x^4-7x^2+5x-6=(x^2+2x-2)(x^2-2x-1)+(3x-8)$

商式$Q(x)=x^2-2x-1$

餘式$R(x)=3x-8$

分離係數法

被除式$A(x)=x^4-7x^2+5x-6$

除　式$B(x)=x^2+2x-2$

$$
\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & -2 & -1 & & & \\
\hline
1+2-2 & 1 & +0 & -7 & +5 & -6 & \\
 & 1 & +2 & -2 & & & \leftarrow x^2\cdot(x^2+2x-2) \\
\hline
 & & -2 & -5 & +5 & & \\
 & & -2 & -4 & +4 & & \leftarrow -2x\cdot(x^2+2x-2) \\
\hline
 & & & -1 & +1 & -6 & \\
 & & & -1 & -2 & +2 & \leftarrow -1\cdot(x^2+2x-2) \\
\hline
 & & & & 3 & -8 &
\end{array}
$$

$x^4-7x^2+5x-6=(x^2+2x-2)(x^2-2x-1)+(3x-8)$

商式$Q(x)=x^2-2x-1$

餘式$R(x)=3x-8$

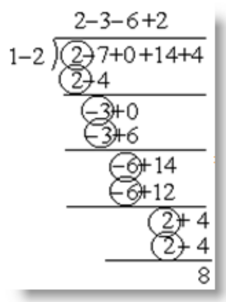
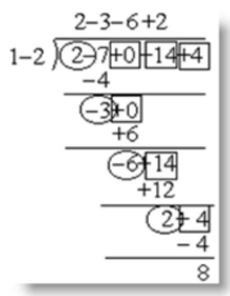
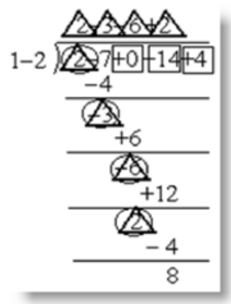
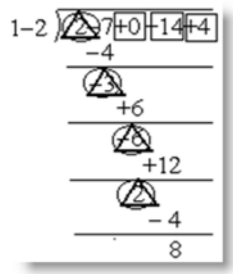
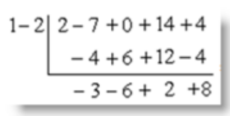
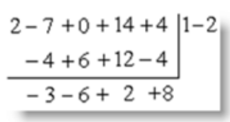
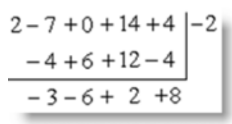
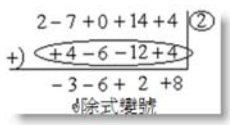
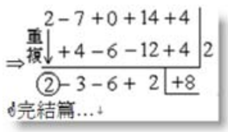
例題11　多項式的除法(綜合除法)

老師講解	學生練習
試求 $(2x^4-7x^3+14x+4)\div(x-2)$ 之商式與餘式	試求 $(x^3-2x^2-2x+3)\div(x-3)$ 之商式及餘式 [簡答]：商式 x^2+x+1，餘式6

詳解

綜合除法

除法進化曲

ver. 1.0	ver. 1.1	ver. 1.2	ver. 1.3
			
ver. 2.0	**ver. 2.1**	**ver. 2.2**	
			
ver. 3.0	**ver. 3.1**		
			

綜合除法

被除式 $A(x)=2x^4-7x^3+14x+4$

除　式 $B(x)=x-2$

例題12　多項式的除法(除式為一次式, 首項係數為1)

老師講解

試求
$\left(2x^3+5x^2+x+5\right)\div(x+2)$之商式及餘式

學生練習

試求$\left(x^2+4x+2\right)\div(x+1)$之商式及餘式

[簡答]：商式$x+3$,餘式-1

例題13A　多項式的除法(除式為一次式, 首項係數不為1)...Print

老師講解

試求$\left(3x^2+2\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$之商式及餘式

學生練習

試求$\left(6x^2-5x-1\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$之商式及餘式

[簡答]：商式$6x-2$,餘式-2

例題13B　多項式的除法(除式為一次式, 首項係數不為1)

老師講解

試求$\left(3x^2+2\right)\div(2x-1)$之商式及餘式

學生練習

試求$\left(6x^2-5x-1\right)\div(2x-1)$之商式及餘式

[簡答]：商式$3x-1$,餘式-2

例題14A 多項式的除法(除式為二次式,首項係數為1)

老師講解	學生練習
試求 $(3x^3+8x^2+7x+2)\div(x^2+2x+1)$之商式及餘式	試求$(x^4+2x^3-x+4)\div(x^2+3x-2)$之商式及餘式 **[簡答]:** 商式$x^2-x+5$,**餘式**$-18x+14$

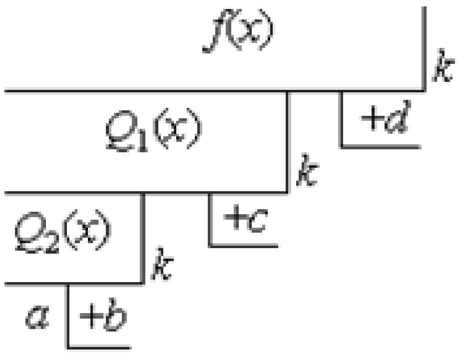
例題14B 多項式的除法(除式為二次式,首項係數不為1)

老師講解	學生練習
試求 $(6x^3-7x^2-4x+8)\div(3x^2+x-2)$之商式及餘式	

2-4-2 多項式的除法原理及其應用

重點

除法原理	• 設$f(x), g(x)$為二多項式,已知$\deg f(x) > \deg g(x)$且$g(x) \neq \underset{零多項式}{0}$ 則 $\underset{被除式}{f(x)} = \underset{除式}{g(x)} \times \underset{商式}{q(x)} + \underset{餘式}{r(x)}$ 且 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$
整除	• 若多項式$f(x)$除以$g(x)$的餘式為0時, 稱"$f(x)$被$g(x)$整除"或"$g(x)$整除$f(x)$", 記為$g(x) \mid f(x)$
因式定理	• $(x+b) \mid f(x) \Rightarrow f(-b)=0$ • $(ax+b) \mid f(x) \Rightarrow f\left(\frac{-b}{a}\right)=0$
餘式定理	• $f(x)$被$(x+b)$除所得之餘式為$f(-b)$ • $f(x)$被$(ax+b)$除所得之餘式為$f\left(\frac{-b}{a}\right)$
換底	• 換底公式:

若 

，則 $f(x)=d+c(x-k)+b(x-k)^2+a(x-k)^3$

例題

例題15　多項式除法原理應用(求除式)

老師講解	學生練習
若多項式x^3+4x^2+5x-3除以$g(x)$的商式為$x+2$, 餘式為$2x-1$, 則$g(x)$=?	**若多項式x^3+2x^2+4x-3除以$g(x)$的商式為$x+3$, 餘式為$4x-12$, 則$g(x)$=? [復興高一95_2]** **[簡答]** : x^2-x+3

試一下

歷屆考題1

若多項式x^3+4x^2+5x-3除以$f(x)$的商式為$x+2$, 餘式為$2x-1$, 則$f(x)$=? [87日社]

[簡答] :

例題16A 多項式除法原理應用(求被除式)

老師講解　　　　　　　　　　學生練習

某多項式除以$(2x-1)$,得商式(x^2-2x+1)及餘式3,求此多項式

例題16B 多項式除法原理應用(求被除式)

老師講解　　　　　　　　　　學生練習

若多項式x^3+x^2+ax+7除以x^2-2x+b的商式為$x+3$, 餘式為$-x+1$, 則a, b之值為何?

例題16C 多項式除法原理應用(求被除式)

老師講解　　　　　　　　　　學生練習

若多項式$2x^3-x^2+ax+b$除以x^2-2x-1 的餘式為$5x+8$, 則a, b之值為何?

例題17A 多項式除法原理應用(整除)

老師講解 學生練習

若$4x^3-13x+k$可被$(2x+1)$整除,求k之值.

例題17B 多項式除法原理應用(整除)

老師講解 學生練習

若x^3+4x^2+ax+b可被x^2+2x-1整除,求a, b值

若$2x^4-x^3+ax^2+4x+b$可被x^2-x+3整除,求a, b值.

[簡答]: $a=4$, $b=-3$

例題18 多項式除法應用(換底)

老師講解 學生練習

若a, b, c是整數,且
$2x^2+3x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$,
求a, b, c之值

例題19A 多項式除法應用(換底)

老師講解

設$f(x)=x^5+2x^2-3x-1$, 試求
(1)(a, b, c, d, e, f) =?
(2)$f(2.003)$ =?(取近似值四捨五入至小數點以下第3位)

學生練習

設
$$f(x)=x^4+8x^3-25x^2+30x-8=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$$
,試求
(1)(a, b, c, d, e) =?
(2)$f(2.003)$ =? (取近似值四捨五入至小數點以下第3位)

[簡答]: (1)$(1, 16, 47, 58, 32)$ (2)-0.060

例題19B 多項式除法應用(換底)

老師講解

設
$3x^3+2x^2+9x+6=a(3x+2)^3+b(3x+2)^2+c(3x+2)+d$
,試求
(1)(a, b, c, d) =?
(2)$f(-0.666)$ =?(取近似值四捨五入至小數點以下第3位)

學生練習

設
$81x^4-54x^3-62x^2+39x+5=a(3x-2)^4+b(3x-2)^3+c(3x-2)^2+d(3x-2)+e$
,試求
(1)(a, b, c, d, e) =?
(2)$f(0.666)$ =?(取近似值四捨五入至小數點以下第3位)

[簡答]：(1)$(1, 6, 5, -7, 3)$ (2)3.014