正弦函數平面變換結論

一、平移及伸縮之討論

1．水平方向變換：

(1)將函數圖形之任意點 $P(x,y)$ 先作平移後為 $P'(x',y')$，再作伸縮後為 $P''(x'',y'')$，關係如下：

$P(x,y)\xrightarrow{\text{水平移動}\theta}P'(x',y')\Rightarrow P'(x+\theta,y)\quad x'=x+\theta,y'=y$

$P'(x',y')\xrightarrow{\text{水平伸縮為}1/\alpha\text{倍}}P''(x'',y'')\Rightarrow P''(\frac{1}{\alpha}x',y')\quad x''=\frac{1}{\alpha}x',y''=y'$

$x''=\frac{1}{\alpha}x'=\frac{1}{\alpha}(x+\theta)\Rightarrow x=\alpha x''-\theta,\quad y''=y'=y\quad\Rightarrow y=\sin x$調整後為$y=\sin(\alpha x-\theta)$

(2)將函數圖形之任意點 $P(x,y)$ 先作伸縮後為 $P'(x',y')$，再作平移後為 $P''(x'',y'')$，關係如下：

$P(x,y)\xrightarrow{\text{水平伸縮為}1/\alpha\text{倍}}P'(x',y')\Rightarrow P'(\frac{x}{\alpha},y)\quad x'=\frac{x}{\alpha},y'=y$

$P'(x',y')\xrightarrow{\text{水平移動}\theta/\alpha}P''(x'',y'')\Rightarrow P''(x'+\frac{\theta}{\alpha},y')\quad x''=x'+\frac{\theta}{\alpha},y''=y'$

$x''=\frac{x}{\alpha}+\frac{\theta}{\alpha}\Rightarrow x=\alpha x''-\theta,\quad y''=y'=y\quad\Rightarrow y=\sin x$調整後為$y=\sin(\alpha x-\theta)$

2．鉛直方向變換：

(1)將函數圖形之任意點 $P(x,y)$ 先作平移後為 $P'(x',y')$，再作伸縮後為 $P''(x'',y'')$，關係如下：

$P(x,y)\xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}\beta\text{倍}}P'(x',y')\Rightarrow P'(x,\beta y)\quad x'=x,y'=\beta y$

$P'(x',y')\xrightarrow{\text{鉛直移動}d}P''(x'',y'')\Rightarrow P''(x',y'+d)\quad x''=x',y''=y'+d$

$y''=y'+d=\beta y+d\Rightarrow y=\sin x$調整後為$y=\beta\sin x+d$

(2)將函數圖形之任意點 $P(x,y)$ 先作伸縮後為 $P'(x',y')$，再作平移後為 $P''(x'',y'')$，關係如下：

$P(x,y)\xrightarrow{\text{鉛直移動}d/\beta}P'(x',y')\Rightarrow P'(x,y+\frac{d}{\beta})\quad x'=x,y'=y+\frac{d}{\beta}$

$P'(x',y')\xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}\beta\text{倍}}P''(x'',y'')\Rightarrow P''(x',\beta y')\quad x''=x',y''=\beta y'$

$y''=\beta y'=\beta(y+\frac{d}{\beta})\Rightarrow y=\sin x$調整後為$y=\beta\sin x+d$

3.在水平方向與鉛直方向均需要作平移或伸縮時，先作水平方向或是鉛直方向的結果是一樣的；但是同一方向先伸縮後平移與先平移後伸縮的平移單位不同，當 $y=\sin(\alpha x+\theta)=\sin(\alpha(x+\frac{\theta}{\alpha}))$ 先水平伸縮再平移時，水平平移單位要乘以$\frac{1}{\alpha}$，

$y=\beta\sin(\alpha x+\theta)+d=\beta(\sin(\alpha x+\theta)+\frac{d}{\beta})$ 先鉛直平移再伸縮時，鉛直平移單位要乘以$\frac{1}{\beta}$。

二、將 $y=\sin x$ 的圖形經過平面變換後結果為：

$$y=\alpha\sin(\beta x+\theta)+d=\alpha\sin(\beta(x+\theta/\beta))+d=\alpha(\sin(\beta x+\theta)+d/\alpha)$$

(1) (2) (3)

(1) $y=\alpha\sin(\beta x+\theta)+d$ ：

將$y=\sin x$圖形 $\xrightarrow{\text{step1.水平移動}\theta}$ $y=\sin(x+\theta)$ $\theta>0$ 向左； $\theta<0$ 向右

step2.
- $\beta>0$ $\xrightarrow{\text{水平伸縮為}\frac{1}{\beta}\text{倍}}$ $y=\sin(\beta x+\theta)$ $|\beta|>1$ 壓縮； $|\beta|<1$ 伸長
- $\beta<0$
  - $\xrightarrow{\text{水平伸縮為}\frac{1}{|\beta|}\text{倍}}$ $y=\sin(|\beta|x+\theta)$ $\xrightarrow{\text{對y軸作對稱圖}}$ $y=\sin(-|\beta|x+\theta)=\sin(\beta x+\theta)$
  - $\xrightarrow{\text{對y軸作對稱圖}}$ $y=\sin(-x+\theta)$ $\xrightarrow{\text{水平伸縮為}\frac{1}{|\beta|}\text{倍}}$ $y=\sin(-|\beta|x+\theta)=\sin(\beta x+\theta)$

step3.
- $\alpha>0$ $\xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}\alpha\text{倍}}$ $y=\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)$ $|\alpha|>1$ 伸長； $|\alpha|<1$ 壓縮
- $\alpha<0$
  - $\xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}|\alpha|\text{倍}}$ $y=|\alpha|\cdot\sin(\beta x+\theta)$ $\xrightarrow{\text{對x軸作對稱圖}}$ $y=-|\alpha|\cdot\sin(\beta x+\theta)=\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)$
  - $\xrightarrow{\text{對x軸作對稱圖}}$ $y=-\sin(\beta x+\theta)$ $\xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}|\alpha|\text{倍}}$ $y=-|\alpha|\sin(\beta x+\theta)=\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)$

$\xrightarrow{\text{step4.鉛直平移}d}$ $\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)+d$ $d>0$ 向上； $d<0$ 向下；

(2) $y=\alpha\sin(\beta(x+\theta/\beta))+d$

將$y=\sin x$圖形 step1.
- $\beta>0$ $\xrightarrow{\text{水平伸縮為}\frac{1}{\beta}\text{倍}}$ $y=\sin(\beta x)$ $|\beta|>1$ 壓縮； $|\beta|<1$ 伸長
- $\beta<0$
  - $\xrightarrow{\text{水平伸縮為}\frac{1}{|\beta|}\text{倍}}$ $y=\sin(|\beta|x)$ $\xrightarrow{\text{對y軸作對稱圖}}$ $y=\sin(-|\beta|x)=\sin(\beta x)$
  - $\xrightarrow{\text{對y軸作對稱圖}}$ $y=\sin(-x)$ $\xrightarrow{\text{水平伸縮為}\frac{1}{|\beta|}\text{倍}}$ $y=\sin(-|\beta|x)=\sin(\beta x)$

$\xrightarrow{\text{step2.水平平移}\frac{\theta}{\beta}}$ $y=\sin(\beta(x+\frac{\theta}{\beta}))$ $\frac{\theta}{\beta}>0$ 向左； $\frac{\theta}{\beta}<0$ 向右

step3.同上

step4.同上

(3) $y=\alpha(\sin(\beta x+\theta)+{}^{d}\!/_{\alpha})$

將$y=\sin x$圖形 step1.同上

step2.同上

$$\xrightarrow{\text{step3.鉛直平移}\frac{d}{\alpha}}\sin(\beta x+\theta)+\frac{d}{\alpha}\qquad \frac{d}{\alpha}>0\ \text{向上;}\qquad \frac{d}{\alpha}<0\ \text{向下;}$$

step4.

$$\begin{cases}\alpha>0 \xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}\alpha\text{倍}} y=\alpha\cdot(\sin(\beta x+\theta)+\frac{d}{\alpha})=\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)+d & |\alpha|>1\ \text{伸長;}\quad |\alpha|<1\ \text{壓縮}\\ \alpha<0\begin{cases}\xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}|\alpha|\text{倍}} y=|\alpha|\cdot(\sin(\beta x+\theta)+\frac{d}{\alpha}) \xrightarrow{\text{對}x\text{軸作對稱圖}} y=-|\alpha|\cdot(\sin(\beta x+\theta)+\frac{d}{\alpha})=\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)+d\\ \xrightarrow{\text{對}x\text{軸作對稱圖}} y=-(\sin(\beta x+\theta)+\frac{d}{\alpha}) \xrightarrow{\text{鉛直伸縮為}|\alpha|\text{倍}} y=-|\alpha|(\sin(\beta x+\theta)+\frac{d}{\alpha})=\alpha\cdot\sin(\beta x+\theta)+d\end{cases}\end{cases}$$